LA FORMA DE LA TIERRA.- (Podemos conocerla solo con la ayuda de las matemáticas?).

Voy a demostrar en este trabajo con la única ayuda de la mecánica y las matemáticas, que la forma que tiene la Tierra en la actualidad, es exactamente la que tendría no siendo un cuerpo rígido o rocoso, debido a la rotación alrededefor de su eje. Los cuerpos rígidos incapaces de deformarse, no sufren cambios en su forma geométrica cuando giran. Sin embargo los cuerpos líquidos o fluidos, así como los viscosos, cambian de forma debido a fuerzas de inercia, que no son contrarestadas por la rigidez.

Dividiremos este escrito en dos partes, en la primera de ellas no van a aparecer fórmulas ni nada por el estilo, y lo puede leer quien solo quiera una información general al estilo periodístico. En la segunda, por si hay alguien que quiera profundizar, demostraré lo expuesto en la primera parte con alguna que otra ecuación.

PRIMERA PARTE.-

A la figura geométrica que tiene nuestra Tierra la llamamos geoide. Los meridianos no son circunferencias.

La primera vez que que se comprobó esta falta de esfericidad fué en el siglo XVIII por medio de dos expediciones, una hacia Laponia y otra hacia El Perú. Quien quiera información sobre esto puede buscarla en internet en "Jorge Juan y la expedición para medir el arco de meridiano", o en escritos similares.

Antes de estas mediciones había dos grupos enfrentados, uno que seguía la idea de Descartes y otro que creia en lo que decía Newton. El primero decía que la Tierra tenía forma de limón, alargada por los polos, y Newton defendía lo contrario, es decir, que era achatada por los polos.

En la segunda parte veremos que no hace falta montar ninguna expedición y que en una mesa con lapiz, papel y a lo sumo una calculadora de bolsillo, se puede obtener con exactitud la falta de esfericidad de la Tierra, la cual, la podemos definir por medio de un número R, que sea la razón entre los radios y ecuatorial radio polar, R=Re/Rp.

Sabemos que la Tierra gira y que tarda un día en dar una vuelta completa alrededor del eje que pasa por los polos.

Sabemos asimismo que en un tiovivo parado, las cadenas de las que cuelgan los columpios, que suelen estar en el borde exterior están en posición vertical. Si el tiovivo se pone en marcha y gira, estas cadenas se separan de la vertical.

Si la Tierra no girase, la plomada, debido a la fuerza de la gravedad apuntaría al centro de la Tierra, pero al igual que en el tiovivo, al girar la Tierra, la plomada también se desvia de la misma forma y el cable que la sujeta "se abre" por decirlo de alguna forma. Al ser la velocidad de rotación de le Tierra mucho menor que la del tiovivo, el ángulo formado por la plomada y la línea que apunta hacia el centro dela Tierra, es menor que el que forman las cadenas del tiovivo con la vertical, pero como veremos no es despreciable.

Con todo esto nos podemos preguntar: ¿Entonces si la plomada no apunta hacia el centro de la Tierra, los edificios que con ella se construyen tampoco?.

La plomada es vertical, así como los edificios que con ella contruimos, y además son perpendiculares al suelo, que es horizontal. La explicación aparece en la figura 1. Las proporciones se han exajerado para facilitar la comprensión. La vertical no apunta hacia el centro de la tierra, excepto en los polos y en el ecuador.

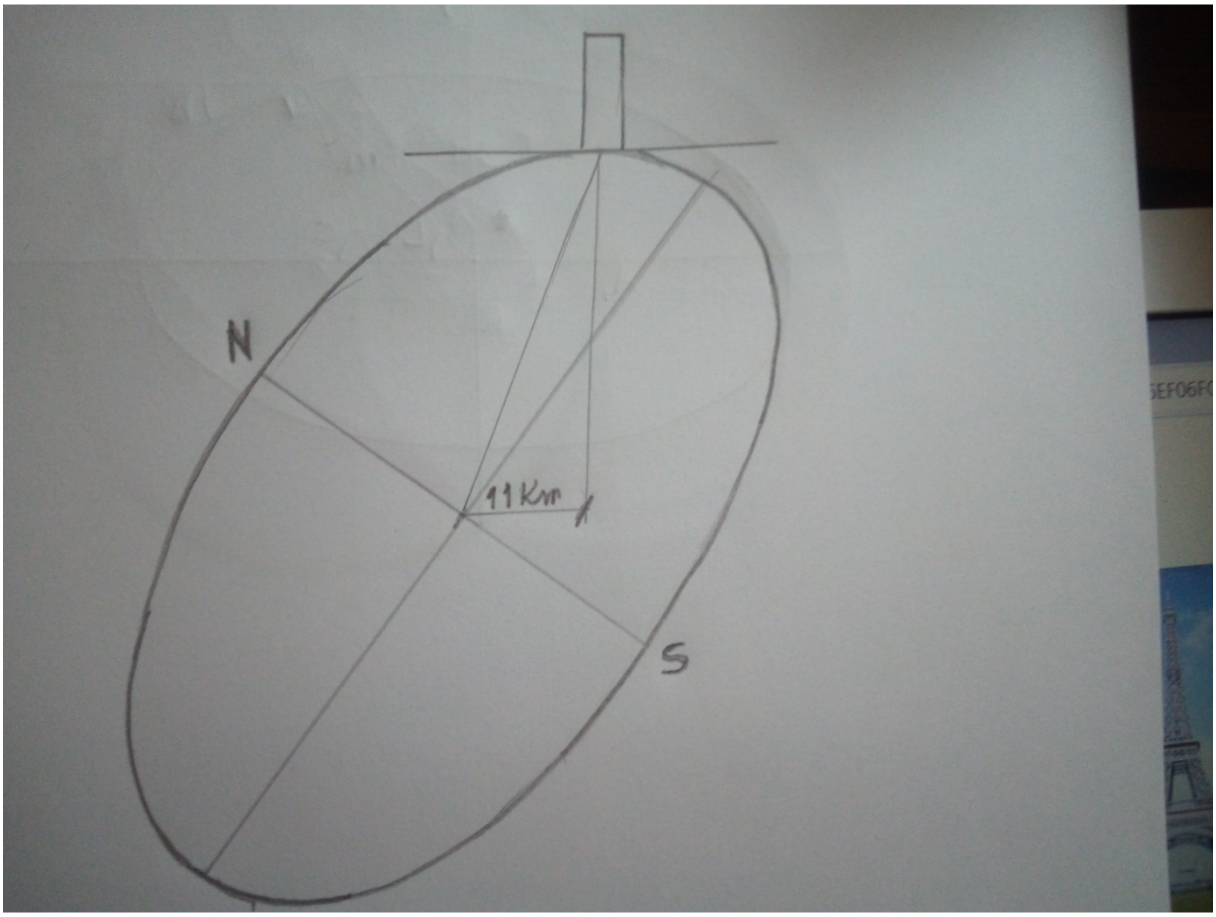


Figura 1.-

La verticalidad de un edificio de 60 m. de altura en Donosti, se desvia en la base del edificio, de la linea que va hacia el centro de la tierra unos 10 cm. En la base de la torre Eiffel este desvio es de 51 cm. Como hemos afirmado más arriba, vemos que este desvío no es despreciable.

En el centro de la Tierra, la dirección de la plomada colocada en Donositia pasa a 11 km. del centro.

Este desvio de la plomada es máximo para una latitud de 45º.

SEGUNDA PARTE.-

Vamos a pasar al estudio teórico de lo que hemos dicho hasta ahora.

Antes haremos un pequeño resumen, para no perdernos entre fórmulas y números.

En primer lugar demostraremos que la plomada no apunta al centro geométrico de la Tierra.

A continuación demostraremos que esa desviación de la plomada es máxima para la latitud de 45º.

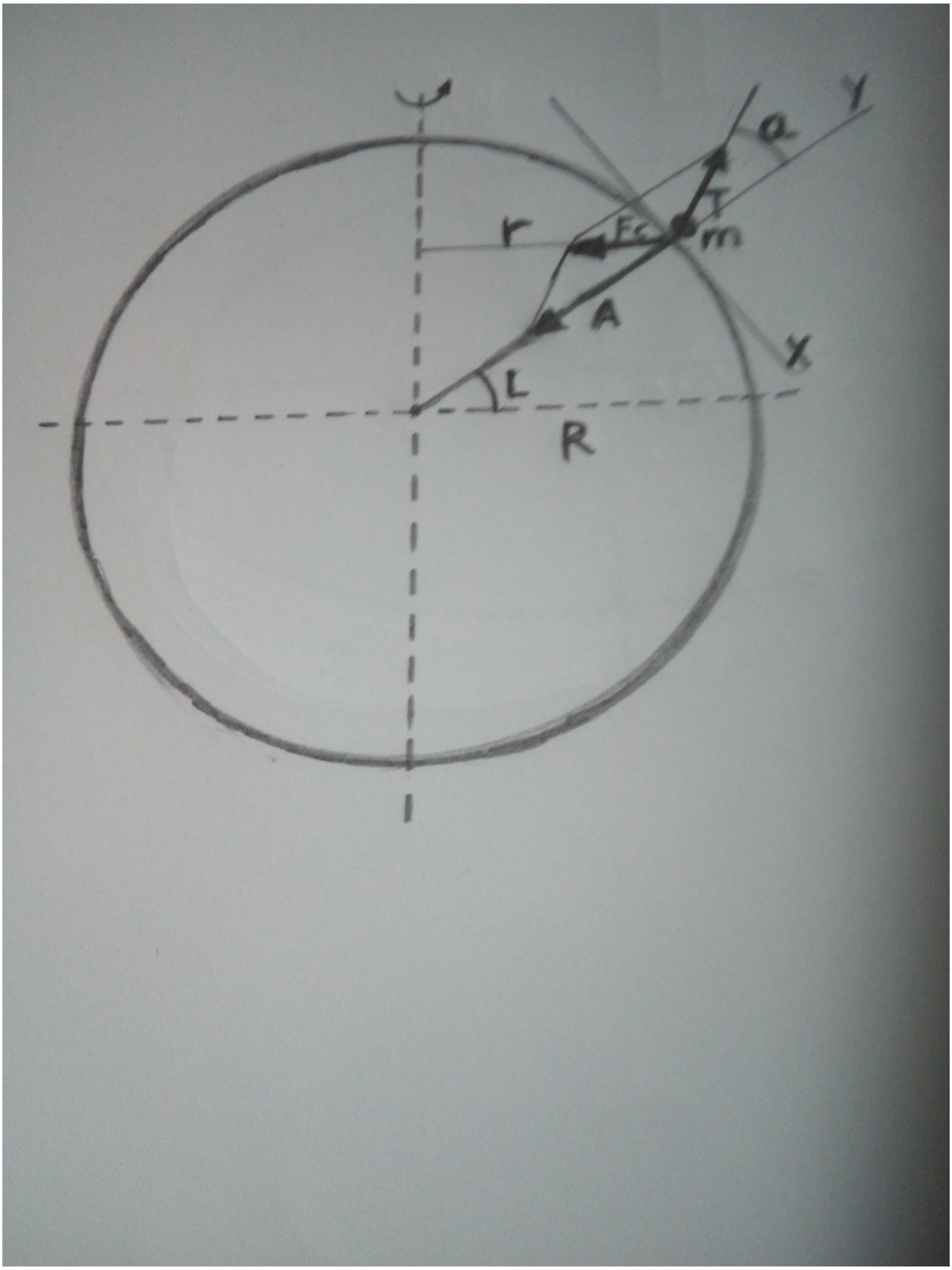
Viendo que la figura de un meridiano puede asemejarse a una elipse, vamos a ver si es posible encontrar una elipse, en la cual para el ángulo de 45º, la perpendicular a la tangente a la elipse en ese punto forma con el radio vector, el mismo ángulo que habremos calculado para la plomada.

Obtendremos que el valor que tiene que tener R es uno determinado, y comprobaremos que es el mismo que realmente se deduce de las mediciones efectuadas sobre la forma de la Tierra.

A continuación realizaremos otra nueva comprobación, de que en esta elipse la desviación máxima de la perpendicular a la tangente se da en el punto en que X=Y, es decir a 45º. Con estas dos “coincidencias” podemos asegurar que los meridianos son elipses, en las que la relacion entre los radios mayor y menor es la R calculada. La Tierra tiene pues la forma de un elipsoide de revolución.

Tras este resumen vamos a ponernos manos a la obra.

En la figura 2 vemos una plomada suspendida de un cable que gira con la Tierra a razón de una vuelta al día.



Las dos únicas fuerzas que actuan sobre el peso de la plomada son, la atracción hacia el centro de la Tierra A, y la tensión ejercida por el cable T.

Como la plomada está girando acompañando a la Tierra con una velocidad angular W, la fuerza total sobre el peso es la centríepeta Fc, dirigida hacia el centro de giro de valor $m \cdot W^2 r$. La dirección de la plomada no es la del radio terrestre, sino que está desviada el ángulo a. Para establecer el equilibrio de estas fuerzas vamos a proyectarlas sobre los X e Y. La suma de los vectores A y T es la fueza Fc, **A+T=Fc** (esta es una ecuación vectorial).

T es el peso del cuerpo es decir T=m·g, y L la latitud.

Proyectando sobre X $m \cdot W^2 \cdot r \cdot senL = A \cdot sena$ y sobre el eje Y, $m \cdot g + m \cdot W^2 \cdot r \cdot cosL = A \cdot cosa$, obtenemos estas dos ecuaciones, dividiendo la primera ecuación entre la segunda,

$W^2 \cdot r \cdot senL/(g+W^2 \cdot r \cdot cosL)=tga$. (1)

La deducción de esta ecuación se puede encontrar en cualquier libro de texto de mecánica. Sin embargo, no ocurre lo mismo con lo que viene a continuación.

Vamos a modificar algo esta ecuación.

En el denominador tenemos $g+W^2 \cdot r \cdot cosL$, $W^2 \cdot r \cdot cosL$ tiene como valor máximo $W^2 \cdot R \cdot 1$, siendo R el radio medio de la TierraR=6.360 km.y W=2(pi)rad/86400 seg. Luego $W^2 \cdot R \cdot cosL$ es menor que $W^2 \cdot R=0{,}0084$ que comparado con $g=9{,}82 m/s^2$, es más de mil veces menor. Podemos pues con un error muy pequeño tomar como valor aproximado del denominador el valor g.

De esta forma la fórmula (1) queda reducida a la siguiente: $tg(a)= W^2 r \cdot senL/g$, pero r=R·cosL, por lo tanto $tga=W^2 \cdot R \cdot senL \cdot cosL/g$. Y utilizando la fórmula del seno del ángulo doble,

$tga=W^2 \cdot R \cdot sen2L/2 \cdot g$ (2)

Podemos ya calcular cuando el ángulo(a) de desviación es máximo, es decir cuando su derivada respecto de la latitud es 0. $dtga/dL= W^2 \cdot R \cdot 2 \cdot cos2L/2 \cdot g=0$, luego tiene que ser cos2L=0 es decir 2L=90º y L=45º.

Como hemos dicho en la primera parte, demostramos ahora con esto, que la máxima desviación de la plomada se dá para una latitud de 45º. Estamos ahora en condiciones de calcular cual es este ángulo máximo de desviación para una latitud de 45º. Para ello calculemos tga sustituyendo los valores en la fórmula (2). W=2(pi)rad/86.400s. R=6.360 km. y $g=9{,}82 m/seg^2$ obtenemos tga=0,00171. Para una plomada o edificio de 60m. el desvio en el suelo sera d=0,00171·60·100=10,27 cm. En Donosti, que está a 43º de latitud, este desvío es de 10,24 cm.

Vamos a tratar de encontrar la ecuación de las curvas que son los meridianos. De estas curvas sabemos varias cosas, que tanto en el ecuador como en los polos, la línea perpendicular a la recta tangente a la curva pasa por el centro de la Tierra. Tambien sabemos que la perpendicular a la tangente a los meridianos para una latitud de 45º forma con el radio de la Tierra un ángulo máximo, y también sabemos su valor, tga=0,00171.

Veamos si podemos encontrar una elipse que cumpla con lo que sabemos que ocurre con los meridianos: 1º que la tangente a la curva forma con el radio vector a 45º un ángulo a siendo tg(a)=0,00171 y 2º que este ángulo sea máximo en ese mismo punto.

En la figura 3 hemos representado la elipse, cuya falta de esfericidad estamos buscando, como asimismo hemos tambien representado sus semiejes A y B y varios ángulos, (L) es la latitud, (a) el desvio de la perpendicular a la recta tangente a la elipse, y b es el ángulo que forma la tangente a la elipse con el eje de abscisas.

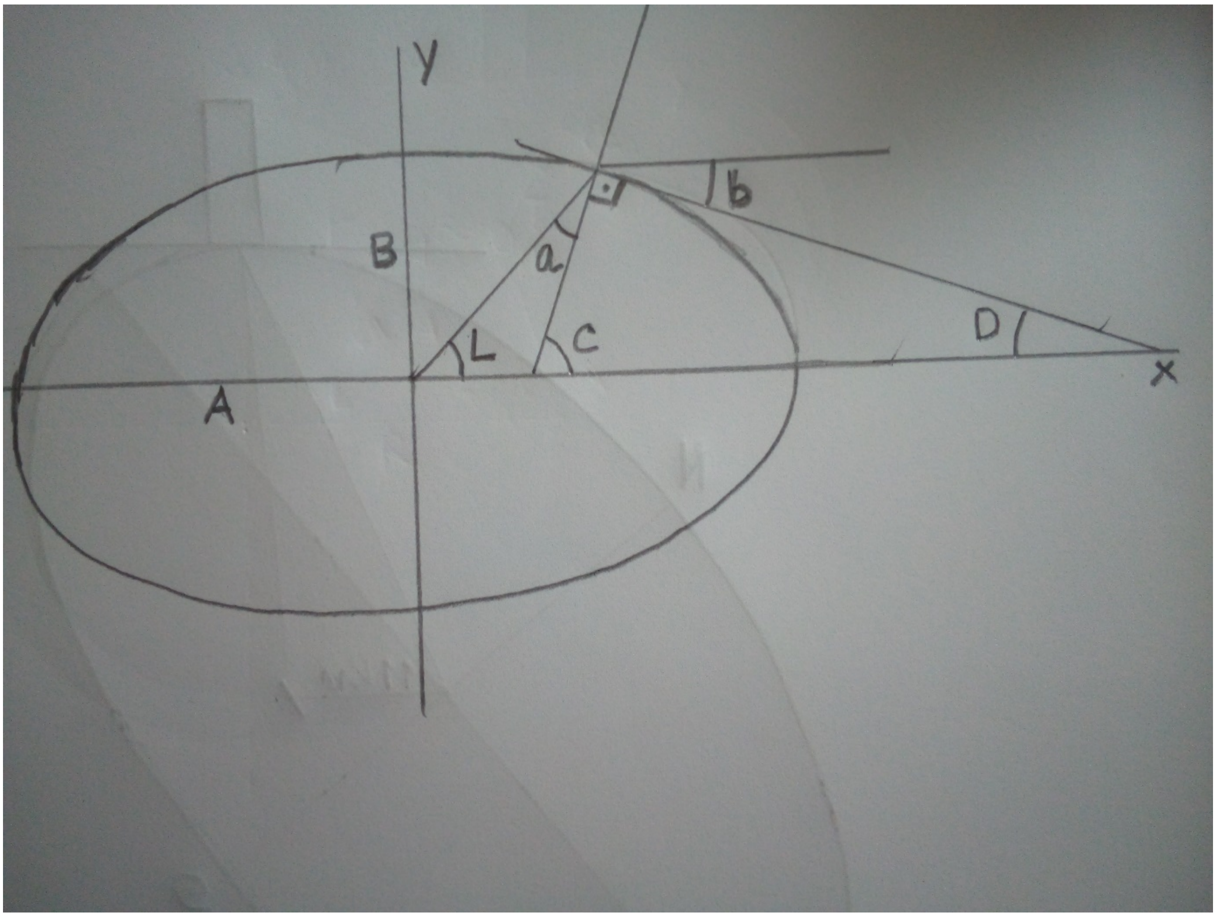


Figura 3.-

Sabemos que tgb=dy/dx, que es negativa a ser la función decreciente en ese punto. En la figura se puede observar que C+D=90º, al ser C un ángulo exterior, su valor es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes es decir C=a+L, luego a+L+D=90º.

Despejando a=90-(D+L), D y b tienen el mismo valor absoluto, pero D es positivo, es decir tgD=-tgb

Llamemos a A/B=R coeficiente de circularidad, que es la relación que tratamos de encontrar, y que para una circunferencia es R=1.

La ecuación de una elipse de semiejes A y B es $(X/A)^2+(Y/B)^2=1$

Despejando, $Y^2=(A^2\cdot B^2-B^2\cdot X^2)/A^2=B^2-X^2/R^2$.

Derivando respecto de X obtenemos $2Y\cdot dY/dX=-2X/R^2$ luego, $tgb=dY/dX=-X/Y\cdot R^2$ y $tgD=-tgb=X/Y\cdot R^2$.

Las tangentes de dos ángulos complementarios son inversas, es decir tg(90-(D+L))=1/(tg(D+L).

Calculando ahora la tangente de la suma de ángulos tg(D+L)=(tgD+tgL)/(1-tgD·tgL), luego, la tangente del ángulo que buscamos tga=(1-tgD·tdL)/(tgD+tgL). (3)

Sustituyendo en esta expresión los valores de tgL=Y/X y $tgD=X/Y\cdot R^2$,

$tga=(1-1/R^2)/(X/R^2\cdot Y+Y/X)$ (3), para L=45º, es decir, para Y=X queremos que tga sea 0.00171,

$0{,}00171=(1-1/R^2)/(1+1/R^2)=(R^2-1)/(R^2+1)$, $0{,}00171R^2+0{,}00171=R^2-1$, $1{,}00171=0{,}99829R^2$ de aquí obtenemos R=1,00171 que es la relación que tienen que tener los ejes de la elipse, para que la desviación sea tga=0,00171 para L=45º.

Comparando este valor con el que se obtiene de la relación de los ejes terrestres, 6.378km/6.356km=1,00346, vemos que son practicamente iguales, la diferencia es menor de un dos por mil, y hay que recordar que en el camino hemos hecho alguna aptoximación del orden del uno por mil para simplificar las ecuaciones y facilitar su tratamiento.

La forma de la Tierra es pues la de un elipsoide de revolución y los meridianos son elipses.

Para corroborar aún más la coincidencia del elipsoide teòrico con el geoide obtenido mediante mediciones, podemos calcular para qué latitud del elipsoide se da el ángulo a máxmo, es decir cuando se anula dtga/dL=0.

Poniendo en (3) a en función de L, $tga=(1-1/R^2)/((1/R^2tgL)+tgL)$, modificando y simplificando $tga=tgL(R^2-1)/(R^2tgL^2+1)$. Ahora ya podemos derivar tga respecto de L, y ver para que valor de L es tga máximo, es decir cuando se anula esta derivada.

Vamos a llamar N al numerador y P al denominador para poder trabajar más fácil. dtga/dL es la derivada de un cociente, que como sabemos es igual a la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador y todo ello dividido por el cuadrado del denominador. Para que esta derivada valga 0 tiene que ser 0 el dividendo, es decir (P·dN/dL)-(N·dP/L)=0, o bien (P·dN/dL)=(N·dP/L), siendo $N=tgL(R^2+1)$ y $P=R^2tgL^2+1$

Recordemos de $dtgL=1/cos^2L$ y $dtg^2L=2senL/cos^3L$

$P·dN/dl=(R^2tg^2L+1)\,(R^2+1)/cos^2L$ y $N·dP/dL=tgL(R^2+1)2R^2senL/cos^3L$,
$(R^2tg^2L+1)(R^2+1)/cos^2L=tgL(R^2+1)2R^2senL/cos^3L$, simplificando $R^2tg^2L+1=2R^2tg^2L$, $R^2tg^2L=1$

Sustituyedo R por el valor obtenido anteriormente de 1,00171, se obtiene finalmente para L=0,7845 radianes, que equivalen a 45º.

Esta comprobación de que la forma de la Tierra sea exactamente la que debería tener si no fuese un sólido rígido, es decir si fuese un cuerpo viscoso, nos demuestra que aunque los continentes son relativamente rígidos, así como los fondos de los océanos, el interior de la Tierra está formado por materiales deformables.

Las matemáticas aplicadas a la mecánica, no solo nos han servido para descubrir la forma de la Tierra,(no su tamaño), sino también para conocer algo sobre su consistencia interior.

Antton del Campo.